Simulação e Otimização
Cap. 2

SIMO/MQDEE

MARIA CÂNDIDA MOURÃO

(cmourao@iseg.ulisboa.pt)

Programa

Cap. 1 – Técnicas de Resolução em Otimização Combinatória
- Relaxações
- Resolução exata de problemas
  - Algoritmo de *branch-and-bound*
  - Algoritmo de planos de corte
- Utilização de software

Cap. 2 – Problemas de Otimização Combinatória - Roteamento
- Problemas de roteamento nos nodos
- Problemas de roteamento nos arcos
- Utilização de Software – VRP **Spreadsheet Solver**

Cap. 3 – Modelos de Investigação Operacional em Simulação
- Simulação e otimização
- Geração de instâncias de problemas de otimização
- Utilização de software de simulação – SIMUL8

Bibliografia

- **Corberán, Á. & G. Laporte** (2014); *Arc Routing Problems, Methods, and Application*; MOS-SIAM Series on Optimization, Philadelphia.
- Drexl, M. (2012); *Rich Vehicle Routing in Theory and Practice*, Logistics Research, Volume 5, pp. 47-63 (DOI: 10.1007/s12159-012-0080-2).
- **Erdoğan, G. (2017);** *An open source Spreadsheet Solver for Vehicle Routing Problems*; Computers and Operations Research, Volume 84, pp. 62-72 (DOI: 10.1016/j.cor.2017.02.022).
- **Hillier, F.S. & G.J. Lieberman** (2010), *Introduction to Operations Research*, 9th ed., McGraw-Hill, New York.
- Mourão, M.C. & L.S. Pinto (2017); *An updated annotated bibliography on arc routing problems*, Networks, Volume 70(3), pp. 144-194 (DOI :10.1002/net.21762)
- **Toth, P. & D. Vigo** (2014); *Vehicle Routing Problems, Methods, and Application*; 2nd ed., MOS-SIAM Series on Optimization, Philadelphia.

Cap. 2 Problemas de Roteamento
aula 5

SIMO/MQDEE

Maria Cândida Mourão

(cmourao@iseg.ulisboa.pt)

Cap. 2 Problemas de Otimização Combinatória

➢ Problemas de Otimização Combinatória

- a solução ótima é um subconjunto de um conjunto finito.
- Problemas que "poderiam ser resolvidos" por enumeração!
- Crescimento exponencial!

➢ Problemas de Roteamento

Cap. 2 Problemas de Otimização Combinatória

Metodologias

✓ Formulações

Modelos de redes & Modelos de PLI

✓ Heurísticas

básicas; construtivas; pesquisa local;
metaheurísticas;
matheurísticas

✓ Relaxações

✓ Softwares:

OPEN SOLVER - Formulações
VRP Spreadsheet SOLVER – Soluções Heurísticas
GERAÇÃO DE INSTÂNCIAS
www.tsp.gatech.edu

Cap. 2 Problemas de Otimização Combinatória

Problemas de Roteamento – Routing Problems (RP)

Identificar rotas que:

- Iniciam e terminam num mesmo ponto – depósito
- Minimizam a distância (tempo; custo; ...) total percorrido

Roteamento nos Nodos
Node Routing Problem (NRP)

Roteamento nos Arcos
Arc Routing Problems (ARP)

Cap. 2 Problemas de Otimização Combinatória

Problemas de Roteamento nos Nodos – Node Routing Problems (NRP)

Características Genéricas dos problemas - identificar rotas que:

- Iniciam e terminam num mesmo ponto – depósito
- Minimizam a distância (tempo; custo; ...) total percorrida
- Têm que passar por um conjunto de pontos (clientes) - todos ou só alguns
- Nos clientes pode ou não existir procura/oferta a satisfazer
- 1/vários veículos que podem ter capacidade limitada
- . . .

Node Routing Problems (NRP)

Outras especificidades:

- **Clientes:**
  - **Time Windows** – janelas temporais para satisfação de clientes
  - Restrições de **precedência** entre clientes
  - Clientes com **oferta e/ou procura** – Delivery & Pickup
  - Visitas **periódicas**
  - Pedido de **veículo específico**
  - . . .
- **Frota:**
  - **um** ou **vários** veículos
  - **homogénea ou heterogénea**
  - **Custos fixos; variáveis; penalidades**
  - **Capacidade; Tempo limite**
  - . . .
- **Objetivos:**
  - **Min Custo**
  - **Min Nº veículos**
  - **Max. Proveitos**
  - **Um** ou **vários** objetivos
  - . . .
- **Estrutura das Rotas:**
  - **Fechadas** ou **abertas**
  - **Uma ou várias** rotas por veículo
  - **Rotas "atrativas"** – equilibradas entre si; compactas; conexas; disjuntas
  - . . .
- **Âmbito do Planeamento:**
  - **Horizonte temporal** – tático; operacional; em tempo real
  - **Tipo de dados** – determinísticos; estocásticos; incertos
  - . . .

Drexl (2012)

Node Routing Problems (NRP)

NRP

TSP | VRP | CVRP

Traveling Salesman Problem
(Problema do Caixeiro Viajante)

- 1 caixeiro
- Cidade de partida/chegada
- Visitar n cidades em tempo total mínimo

Vehicle Routing Problem

- 1 veículo
- Garagem de partida/chegada
- Visitar n clientes em tempo total mínimo

Capacitated VRP

- 1/K veículos de capacidade limitada
- Garagem de partida/chegada
- Satisfazer procura/oferta de n clientes em tempo total mínimo

Cap. 2 Problemas de Otimização Combinatória

Roteamento nos Nodos– NRP – em geral, NP-difíceis!

TSP – Dado um conjunto de (n) cidades e as distâncias entre cada par de cidades, **qual** a rota de comprimento total mínimo que, partindo de uma cidade específica, passa em cada uma das restantes cidades exatamente uma vez e volta à cidade de partida?

- Nº SA → $(n-1)!$ (caso orientado)
- **Enumeração** -> só se conseguem resolver **instâncias** de pequenas dimensões!
- **Formulações; Minorantes; Majorantes**

n	$(n-1)!$	n	$(n-1)!$
5	24		
10	362'880	150	3.81×10^{260}
100	9.33×10^{155}	1001	4.02×10^{2567}

TSP – História

BC – Before Computers

George Dantzig
1914 - 2005

AC – After Dantzig

- Matemático Russo;
- Método do Simplex
- Pai da PL & PLI

George B. Dantzig developed such a method in 1947 while being assigned to the U.S. military. Ideally suited to computer use, the method is used routinely on applied problems involving hundreds and even thousands of variables and problem constraints.

A Short History of the TSP
G. Laporte;
CRT & GERAD HEC Montréal, Canada, Working Paper, 2006

TSP – História + Antiga

1759 - Euler ("Solution d'une question curieuse qui ne paraît soumise à aucune analyse"), Mémoire de l'Académie des Sciences de Berlin 15, 310–337 published in Opera Omnia (1) 7 (1766) 26–56. Studied the Knight's tour problem

1856 - Kirkman, rector of the parish of Craft with Southworth, Lancashire, from 1840 to 1892. Philosophical Transactions of the Royal Society, London, 146 (1856) 413–418. "Given the graph of a polyhedron, can one always find a circuit which passes through each vertex one and only once?"

1856 – Hamilton, Icosian game (marketed in 1859): find paths and circuits on the dodecahedral graph, satisfying certain conditions (e.g., adjacency conditions, etc.). The rights were sold for £25 to a wholesaler dealer in games and puzzles.

1930 – Menger, Hamiltonian path: "We call this the messenger problem (because in practice the problem has to be solved by every postman, and also by many travelers): finding the shortest path joining all of a finite set of points, whose pairwise distances are known".

1931-32 - Book published in German: "**The Traveling Salesman Problem**, how he should be and what he should do to be successful in his business. By a veteran traveling salesman". Last chapter: "By a proper choice and scheduling of the tour, one can often gain so much time that we have to make some suggestions . . . The most important aspect is to cover as many location as possible without visiting a location twice".

1937 (?) - Tucker Introduced the problem in 1937 according to Flood, and in 1931/32 according to Tucker, in relation with a school-bus routing study in New Jersey.

A Short History of the TSP; G. Laporte; 2006

TSP – História + Recente

TSP Simétrico

- Dantzig, Fulkerson & Johnson (1954) - origem do "branch-and-cut"

TSP Assimétrico

- Eastman's thesis (1958)
- Artigos de
  - Land and Doig (1960)
  - Little, Murty, Sweeney and Karel (1963)

  Origem do "branch-and-bound"

A Short History of the TSP; G. Laporte; 2006

Heurísticas

- Artigos de Croes (1958) e de Lin (1965) – origem dos Alg. de Pesquisa Local

TSP – História

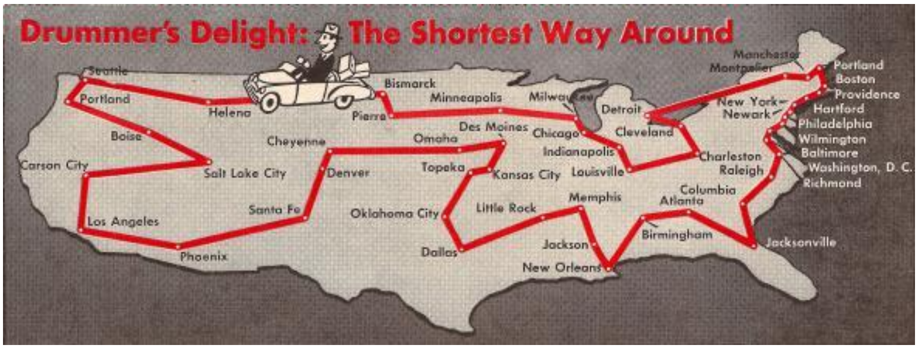
- Origem do TSP – desconhecida! 1932 – livro alemão – rotas dos caixeiros viajantes
- Nome: 1930-1940
- Evolução: desafios de problemas com
  - 49 cidades - USA - Dantzig, 1954
  - 120 cidades – Alemanha – Grötschel, 1977
  - 532 cidades – USA – Padberg & Rinaldi, 1987
  - 666 cidades - à volta do mundo – Grötschel & Holland, 1987
  - ...
  - 85'900 cidades – Cook, Espinoza & Goycoolea, 2006
  - "1,904,711-city world TSP": a 0.112% do ótimo em 256.1 dias em 2003 (Math Prog. Series B)

www.tsp.gatech.edu

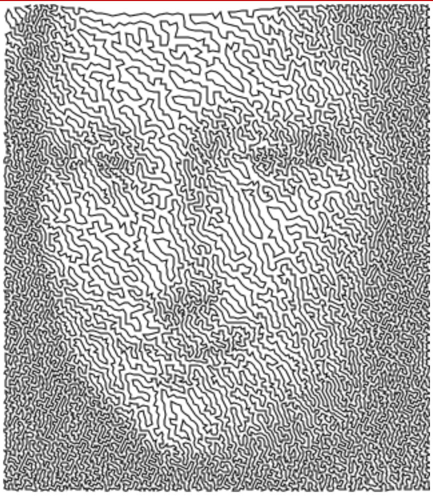
TSPLIB
Desafios de hoje

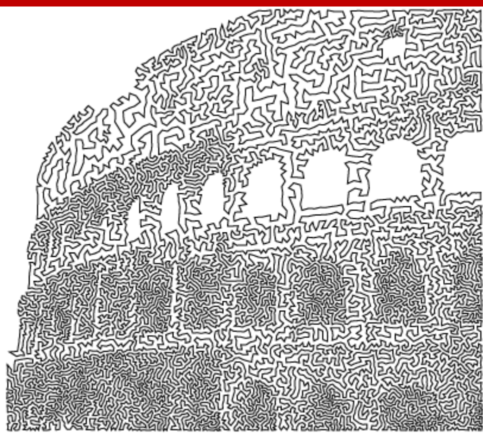
The TSP – a computational study
D. Applegate, R. Bixby, V. Chvátal, W. Cook;
Princeton Series in Applied Mathematics, 2006, Oxford

TSP - USA



TSP - curiosidades





11’999 cidades

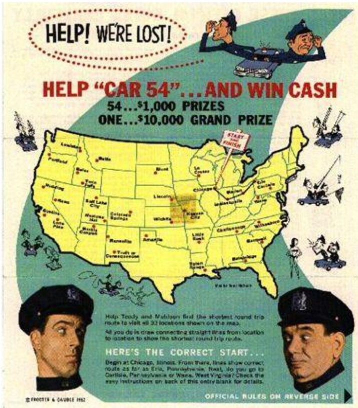
10’000 cidades

Concorde Software – SAs!

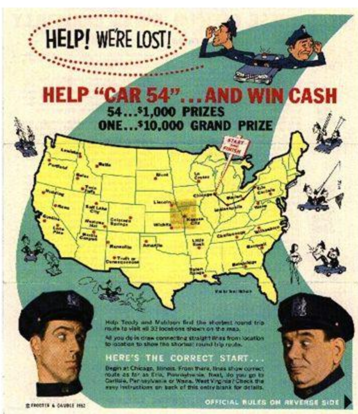
C.S. Kaplan & R. Bosch, 2005
TSP Art, Technical Report, School of Computer Science, Univ of Waterloo, Canada

TSP - curiosidades

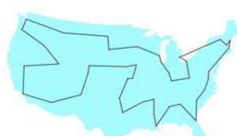
Mark Twain, *The Innocents Abroad, 1869*



Proctor and Gamble ran a contest in 1962. The contest required solving a TSP on a specified 33 cities. There was a tie between many people who found the optimum.

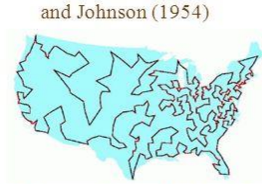


Proctor and Gamble ran a contest in 1962. The contest required solving a TSP on a specified 33 cities. There was a tie between many people who found the optimum.



49 cities
- Dantzig, Fulkerson, and Johnson (1954)

120 cities
- Groetschel (1977).



- Padberg and Rinaldi (1987) 532 AT&T switch locations.

- Groetschel and Holland (1987) tour of 666 interesting places.

- Padberg and Rinaldi (1987) tour through a layout of 2,392 that was obtained from Tektronics Incorporated.
- Applegate, Bixby, Chvátal, and Cook (1994) tour for a 7,397-city TSP that arose in a programmable logic array application at AT&T Bell Laboratories.

The traveling salesman problem on the WWW
- http://www.math.princeton.edu/tsp/index.html
- http://www.cs.rutgers.edu/~chvatal/tsp.html

Finite Mathematics, Feodor F. Dragan, Kent State University

TSP

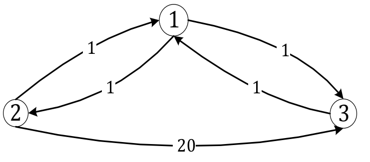
Dados

- ✓ Rede Base: $G = (V, A \cup E)$
  - ✓ V – nodos; vértices – a visitar uma e uma só vez
  - ✓ Depósito $(0 \in V)$ – indica o início e fim do percurso (cidade)
  - ✓ A – arcos (arcs) – ligações orientadas entre dois nodos
  - ✓ E – arestas (edges) – ligações não orientadas entre dois nodos
  - ✓ c_{ij} - custo (tempo; distância; ...) de deslocação entre $i \in V$ e $j \in V$
- ✓ Objetivo – Identificar um circuito em G, que passa uma e uma só vez em cada nodo de G de custo total mínimo

Casos: Orientado (assimétrico);
Não Orientado (simétrico);
Misto

TSP

- ✓ Circuito Hamiltoniano em G - circuito em G que passa uma e uma só vez em cada nodo de G
- ✓ Circuito Hamiltoniano de custo mínimo é sempre a SO do TSP?
- ✓ Desigualdade triangular falha – exemplo:



- ✓ Teorema: Se $\forall i, j \in V\ c_{ij} \leq c_{iu} + c_{uj},\ \ \forall u \neq i, u \neq j$, então um circuito Hamiltoniano de custo mínimo em G é uma SO do TSP, caso exista

J.R. Evans & E. Minieka, 1992
Optimization Algorithms for Networks and Graphs
2nd ed.Marcel Dekker, INC., NY

TSP – Heurísticas Construtivas

Logística e Redes...

H. Construtiva - Vizinho Mais Próximo (Nearest-Neighbor) – tipo *greedy*

1. Escolher um qualquer vértice inicial, $i \in V$;

   Iniciar a rota: $R = (i,)$, com $VR = \{i\} \subset \mathrm{V}$;

2. Procurar o vértice $j \in V \backslash \mathrm{VR}$ mais perto de i que ainda não esteja na rota, ou seja:

   $j = argmin\{c_{iv}: v \in V \backslash \mathrm{VR}\}$;

   Se $\nexists j$ **FIM** – não é possível encontrar uma SA por este método

   c.c. juntar o vértice j no final da rota R

3. **Se** $|VR| = |V|$ **FIM** $\Longrightarrow$ a rota R representa uma SA do TSP

   c.c. Fazer $i \leftarrow j$; Voltar a 2.

M.M. Flood, 1956
The TSP
Op. Res., 4, 61-75

- Problema: a escolha do próximo vértice tem tendência a deteriorar à medida que o algoritmo avança!
- Vizinho Mais Longe; Escolha aleatória numa certa vizinhança; ...

TSP – Heurísticas Construtivas

H. Construtiva: Inserção Mais Próxima (Nearest-Insertion)

1. Escolher um qualquer vértice inicial, $i \in V$; Fazer $\mathrm{VR} = \{i\}$

   Procurar o vértice $j \in V \backslash \mathrm{VR}$ mais perto de i;

   Iniciar a rota: $R = (i, j, i)$, com $VR = \{i, j\} \subset \mathrm{V}$;

2. Procurar o vértice $k \in V \backslash \mathrm{VR}$ mais perto de qualquer vértice em VR e encontrar a aresta (v, u) que minimiza $c_{vk} + c_{ku} - c_{vu}$ $\forall v, u \in VR$;

   Se $\nexists k$ **FIM** – não é possível encontrar uma SA por este método

   c.c. juntar o vértice k entre v e u na rota R; atualizar VR

3. **Se** $|VR| = |V|$ **FIM** $\Longrightarrow$ a rota R representa uma SA do TSP

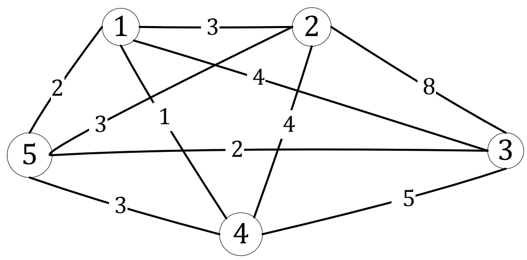
   c.c. Voltar a **2**.

D.J. Rosenkrantz, R.E. Sterns & P.M. Lewis, 1974
Approximate Algorithms for the TSP
Proc. 15th Ann. IEEE Symp. Switching and Automatic Theory, pp. 33-42

TSP – Heurísticas – exemplo 1

H. Construtiva - Inserção Mais Próxima

$$\begin{array}{c|c}
i,j & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\
\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} - & 3 & 4 & 1 & 2 \\ & - & 8 & 4 & 3 \\ & & - & 5 & 2 \\ & & & - & 3 \\ & & & & - \end{pmatrix}
\end{array}$$



TSP – Heurísticas – exemplo 1

H. Construtiva – Inserção Mais Próxima

R	VR	Nodo $\notin VR$ + Perto	custo	Posição	ΔCusto	Custo Total
1-4-1						

TSP – Heurísticas – exemplo 1

H. Construtiva – Inserção Mais Próxima

R	VR	Nodo $\notin VR$ + Perto	custo	Posição	ΔCusto	Custo Total
1-4-1	1	5	**2**	1-5-4	$\Delta = c_{15} + c_{54} - c_{14} = 2 + 3 - 1 = 4$	$2 + 4 = 6$
				4-5-1	Δ=4	
	4	5	3			
1-4-5-1	1	2	3			
	4	2	4			
	5	3	**2**	1-3-4	$\Delta = c_{13} + c_{34} - c_{14} = 4 + 5 - 1 = 8$	6+4=10
				4-3-5	$\Delta = c_{43} + c_{35} - c_{45} = 5 + 2 - 3 = 4$	
				5-3-1	$\Delta = c_{53} + c_{31} - c_{51} = 2 + 4 - 2 = 4$	

TSP – Heurísticas – exemplo 1

H. Construtiva – Inserção Mais Próxima

R	VR	Nodo $\notin VR$ + Perto	custo	Posição	ΔCusto	Custo Total
1-4-3-5-1	1					
	4					
	3					
	5					

TSP – Heurísticas – exemplo 1

H. Construtiva – Inserção Mais Próxima

R	VR	Nodo $\notin VR$ + Perto	custo	Posição	ΔCusto	Custo Total
1-4-3-5-1	1	2	3	1-2-4	$\Delta = c_{12} + c_{24} - c_{14} = 3 + 4 - 1 = 6$	10+4=14
				4-2-3	$\Delta = c_{42} + c_{23} - c_{43} = 4 + 8 - 5 = 7$	
				3-2-5	$\Delta = c_{32} + c_{25} - c_{35} = 8 + 3 - 2 = 9$	
				5-2-1	$\Delta = c_{52} + c_{21} - c_{51} = 3 + 3 - 2 = 4$	
	4	2	4			
	3	2	8			
	5	2	3			

Logo, $R = (1,4,3,5,2,1)$ de custo total 14

TSP – Heurísticas Melhorativas

H. Melhorativa – k-opt

1. Identificar S uma SA para o TSP
2. Substituir k arestas de S e outras k para gerar uma nova rota S'
3. **Se** o valor de S' é menor que o de S, fazer $S \leftarrow S'$ e voltar a 2.
   c.c., **FIM** S é a melhor SA

Logística e Redes…

S. Lin & B.W. Kernighan, 1973
An Effective Heuristic Algorithm for the TSP
Op. Res., 21(2) pp. 498-516

TSP – Heurísticas Melhorativas

H. Melhorativa – Inversão de Sub-rotas

1. Identificar S uma SA para o TSP
2. Considerar todas as possibilidades de inverter subrotas (sem considerar toda a rota inicial) em S
3. **Se** nenhuma inversão melhora o valor da AS corrente S **FIM**

   c.c., Escolher a inversão que origina maior decréscimo no valor da SA para representar a nova SA;

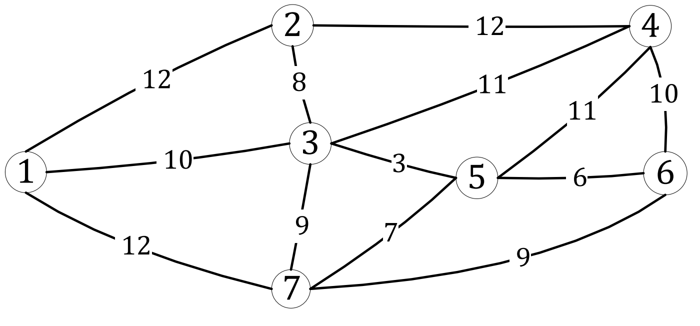
   Atualizar S considerando a inversão escolhida e voltar a 2.

Caso Não Orientado

J. Little, K. Murty, D. Sweeney, C. Karel, 1963
An Algorithm for the TSP
Op. Res., 11(6), 972-989

TSP – Heurísticas – exemplo 2

H. Melhorativa – Inversão de Sub-rotas



Seja $S = (1,2,3,4,5,6,7,1)$

TSP – Heurísticas – exemplo 2

H. Melhorativa – Inversão de Sub-rotas

Inverter	Rota	alteração	Distância total
S (inicial)	1-2-3-4-5-6-7-1		69

TSP – Heurísticas – exemplo 2

H. Melhorativa – Inversão de Sub-rotas

Inverter	Rota	alteração	Distância total
S (inicial)	1-2-3-4-5-6-7-1		69
2-3	1-3-2-4-5-6-7-1	$c_{13}+c_{24}-c_{12}-c_{34} = 10+12-12-11=-1$	68
3-4	1-2-4-3-5-6-7-1	$c_{24}+c_{35}-c_{23}-c_{45} = 12+3-8-11 = -4$	65
4-5	1-2-3-5-4-6-7-1	$c_{35}+c_{46}-c_{34}-c_{56} = 3+10-11-6 = -4$	65
5-6	1-2-3-4-6-5-7-1	$c_{46}+c_{57}-c_{45}-c_{67} = 10+7-11-9 = -3$	66

TSP – Heurísticas – exemplo 2

H. Melhorativa – Inversão de Sub-rotas

Inverter	Rota	alteração	Distância total
S (inicial)	1-2-4-3-5-6-7-1		65

TSP – Heurísticas – exemplo 2

H. Melhorativa – Inversão de Sub-rotas

Inverter	Rota	alteração	Distância total
S (inicial)	1-2-4-3-5-6-7-1		65
2-4-3	1-3-4-2-5-6-7-1	não admissível	
4-3-5	1-2-5-3-4-6-7-1	não admissível	
3-5-6	1-2-4-6-5-3-7-1	$c_{46} + c_{37} - c_{43} - c_{67} = 10 + 9 - 11 - 9 = -1$	64
5-6-7	1-2-4-3-7-6-5-1	não admissível	

TSP – Heurísticas – exemplo 2

H. Melhorativa – Inversão de Sub-rotas

Inverter	Rota	alteração	Distância total
S (inicial)	1-2-4-6-5-3-7-1		64

TSP – Heurísticas – exemplo 2

H. Melhorativa – Inversão de Sub-rotas

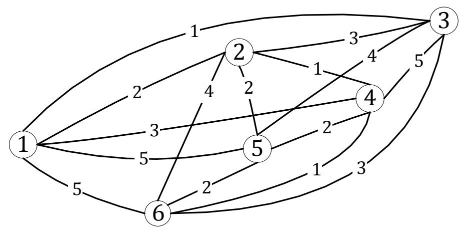
Inverter	Rota	alteração	Distância total
S (inicial)	1-2-4-6-5-3-7-1		64
2-4-6-5	1-5-6-4-2-3-7-1	não admissível	
4-6-5-3	1-2-3-5-6-4-7-1	não admissível	
6-5-3-7	1-2-4-7-3-5-6-1	não admissível	

Logo, $S = (1,2,4,6,5,3,7,1)$ de valor 64

TSP – Heurísticas – Exercício 1

Considere a seguinte rede e matriz de custos:

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6
1	–	2	1	3	5	5
2		–	3	1	2	4
3			–	5	4	3
4				–	2	1
5					–	2
6						–



a) Identifique uma SA utilizando o algoritmo de inserção mais próxima

b) Utilizando o algoritmo de inversão de subrotas, determine uma SA, considerando a seguinte SA inicial:
   1. 1-2-3-4-5-6-1
   2. obtida em a)

TSP

Cap. 2 – Problemas de Otimização Combinatória - Roteamento

Problemas de roteamento nos nodos

Problemas de roteamento nos arcos

Utilização de Software – VRP **Spreadsheet Solver**

- Roteamento nos nodos
  - Modelos – Casos Orientado e não Orientado
  - Relaxações
  - Solver/Excel

TSP –Modelos – caso orientado (assimétrico)

- Dados: $G = (V, A)$; c_{ij}
- Variáveis: $x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se o caixeiro viaja de } i \in V \text{ para } j \in V \\ 0 & \text{c. c.} \end{cases}$
- Modelo:

$$(\text{P1}) \quad \min \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}\, x_{ij} \qquad \text{Minimização do custo total}$$

$$\text{s. a:} \begin{cases} \sum_{j:(i,j)\in A} x_{ij} = 1 \quad \forall i \in V & \text{De cada nodo } i \text{ só sai uma ligação} \\ \sum_{k:(k,i)\in A} x_{ki} = 1 \quad \forall i \in V & \text{Uma só ligação para entrar em cada nodo } i \\ \sum_{i\in S} \sum_{j\in V\setminus S} x_{ij} \geq 1 \quad \forall S \subset V & \text{Restrições de eliminação de subcircuitos ilegais} \\ x_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall (i,j) \in A & \end{cases}$$

TSP – Modelos – CO – Exemplo 3

Considere a matriz de custos seguinte relativa a um problema de Caixeiro viajante

$$\begin{array}{c|cccc} i,j & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & \infty & 3 & 5 & 1 \\ 2 & \infty & \infty & 1 & 6 \\ 3 & 6 & 1 & \infty & 3 \\ 4 & 1 & 5 & \infty & \infty \end{array}$$

a) Formalize o problema e resolva-o pelo Solver/Excel

b) Utilize o Solver para obter a solução do problema relaxado em que não se consideram as restrições de eliminação de subcircuitos

c) Introduza na solução de b) restrições de eliminação de subcircuitos até encontrar uma SO do TSP

d) Identifique uma SA utilizando a heurística do vizinho mais próximo e uma pela de melhor inserção

e) Compare os valores obtidos por todos os métodos